Travail

DU GROUPE :

Fatimetou Abdellahi
Toutou med mahmoud
Salma Kerbally

CLASSE : 7C

Exercice de Fonction Sur :

- Généralité sur les fonction :

  N°. de exercices : 3, 6, 9, 12 et 15

- Primitives et integrales :

  N° d'exercices : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 et 19

Generalites sur les fonction, chapitre (5)

Exercice 6

Démontrer que l'équation $x+\tan x=0$ admet trois solutions dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Solution :

On pose $f(x)=x+\tan x$

$$f(x)=x+\frac{\sin x}{\cos x}$$

f est definie ssi $\cos x \neq 0$

- $\cos x = 0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\boxed{k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \in [-\pi,\pi]}$

$k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi > \pi$

$\boxed{k=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2} \in [-\pi,\pi]}$

$k=-2 \Rightarrow x=-\frac{3\pi}{2} < -\pi$

Donc f est definie sur $[-\pi,\pi]\setminus\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\} = [-\pi,-\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $\lim_{x\to -\pi^+} f(x) = -\pi+0=-\pi$
- $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}+\frac{-1}{0^+}=+\infty$
- $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to \pi^-} f(x) = f(\pi)=\pi$

- $f'(x)=1+1+\tan^2 x$
$= 2+\tan^2 x > 0 \quad \forall x\in D_f$

T.V de f.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\pi$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	π

Donc sur chacun des trois intervalles $]-\pi,-\frac{\pi}{2}[$. $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2},\pi[$ la fonction f est continue et strictement $\nearrow$ et elle change de signe d'où l'equation $f(x)=0$

(c'est à dire l'equation $x + \tan x = 0$) admet dans chacun de ces trois intervalle, au t une solution unique donc au total elle admet exactement trois Solution d'ans l'intervalles $[-\pi, \pi]$..

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^4-\frac{4}{x}$.

Démontrer que l'équation $f(x)=\sin x$ admet une solution dans l'intervalle [1,2].

Exercice 03 :

$$f(x)=x^4-\frac{4}{x}$$

Montrons que l'equation $f(x)=\sin x$ admet une solution sur $I=[1,2]$ $\Leftrightarrow$ Montrons $f(x)-\sin x=0$ admet une solution sur I

Soit $h(x)=f(x)-\sin x=x^4-\frac{4}{x}-\sin x$

h est continue sur $I=[1,2]$

$h(1)=1^4-\frac{4}{1}-\sin(1)=-3-\sin(1)<0$

$h(2)=2^4-\frac{4}{2}-\sin(2)=14-\sin(2)>0$

Comme $h(1)\times h(2)<0 \Rightarrow 0\in h(x)$.

D'apres le T.V.I , $\exists\, x_0\in I$, $h(x_0)=0$

$$\Leftrightarrow f(x_0)-\sin(x_0)=0$$

$$\Rightarrow f(x_0)=\sin(x_0)$$

Donc l'équation admet une solution x_0.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est une fonction affine.

2) Donner l'expression de f(x).

Solution

Exercice 07 :

1) $f'(x)=\cos x\cdot\sqrt{\cos^2 x}+\sin x\sqrt{\sin^2 x}=\cos|\cos x|+\sin x|\sin x|$

$x\in[0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x\geq 0,\ \sin x\geq 0 \Rightarrow f'(x)=\cos x\cdot\cos x+\sin x\times\sin x=1$

Donc $f(x)=x+k$, $k\in\mathbb{R}$, fonction affine.

2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt = 0$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{\pi}{4}$

D'où $f(x) = x - \frac{\pi}{4}$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-4}$ et (C) sa courbe représentative, dans un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f et construire (C).

2) On considère l'homothétie h de centre $\Omega(2;1)$ et de rapport k tel que $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. Trouver une équation cartésienne de (C_k) image de (C) par h. Construire (C) et (C_2) dans le même repère.

Exercice 9 :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-4}$

1) $x \in D_f \Rightarrow 2x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \Leftrightarrow D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{2x} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$

$\Rightarrow y = 1$; AH de C

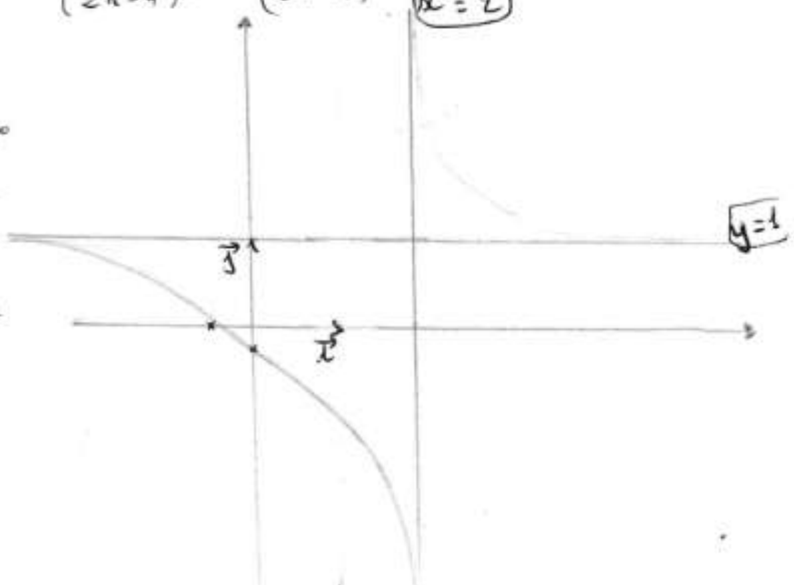
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2\times 2+1}{2\times 2-4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$.

$\Rightarrow x = 2$; AV de C

$f'(x) = \dfrac{2(2x-4) - 2(2x+1)}{(2x-4)^2} = \dfrac{4x - 8 - 4x - 2}{(2x-4)^2} = \dfrac{-10}{(2x-4)^2} < 0$

T. V :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 1



2°) $\Omega(2,1)$; $\vec{\Omega M'} = k\,\vec{\Omega M}$, $\forall\, M(x,y)$ et $M'(x',y')$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-2 = k(x-2) \\ y'-1 = k(y-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'-2}{k}+2 \\ y = \frac{y'-1}{k}+1 \end{cases}$$

$f(x) = y$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{2x-4} = y \quad \Rightarrow \frac{2\cdot\left(\frac{x'-2}{k}+2\right)+1}{2\cdot\left(\frac{x'-2}{k}+2\right)-4} = \frac{y'-1}{k}+1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2x'-4+4k+k}{k}}{\frac{2x'-4+4k-4k}{k}} = \frac{y'-1}{k}+1 \quad \Rightarrow \frac{2x'-4+5k}{2x'-4} = \frac{y'-1}{k}+1$$

$$\Rightarrow y'-1 = k\left(\frac{2x'-4+5k}{2x'-4}-1\right) \Rightarrow y' = k\left(\frac{2x'-4+5k-2x'+4}{2x'-4}\right)+1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{5k^2}{2x'-4}+1 \quad \Rightarrow y' = \frac{5k^2+2x'-4}{2x'-4}$$

Donc l'équation Cartesienne :

$$y = \frac{5k^2+2x-4}{2x-4}$$

$$f_2(x) = \frac{2(2x+9-2-4)}{2x-4}+1-2 = \frac{4x+20-4}{2x-4}-1$$

$$= \frac{4x+20-\cancel{4}-2x+\cancel{4}}{2x-4} = f_2(x) = \frac{2x+20}{2x-4}$$

$$= \frac{2(x+10)}{2(x-2)}$$

On a : $f_2(x) = \frac{x+10}{x-2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = \dfrac{x(1+\frac{10}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = \dfrac{1}{1} = 1$

A.H $y = 1$ (au voisinage $-\infty$)

• $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{10}{0^-} = -\infty$ A.V $x = 2$

• $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{12}{0^+} = +\infty$. A.V $x = 2$.

• $\lim f(x) = 1$ A.H $y = 1$

x		2	
$x-2$	$-$	0	$+$

$f'(x) = \dfrac{(x-2)-(x+10)}{(x-2)^2} = \dfrac{x-2+x-10}{(x-2)^2} = \dfrac{-12}{(x-2)^2} < 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

$\mathcal{C}_2 \cap (Oy)$: $f_2(0) = \dfrac{10}{-2} = -5$ $(0; -5)$

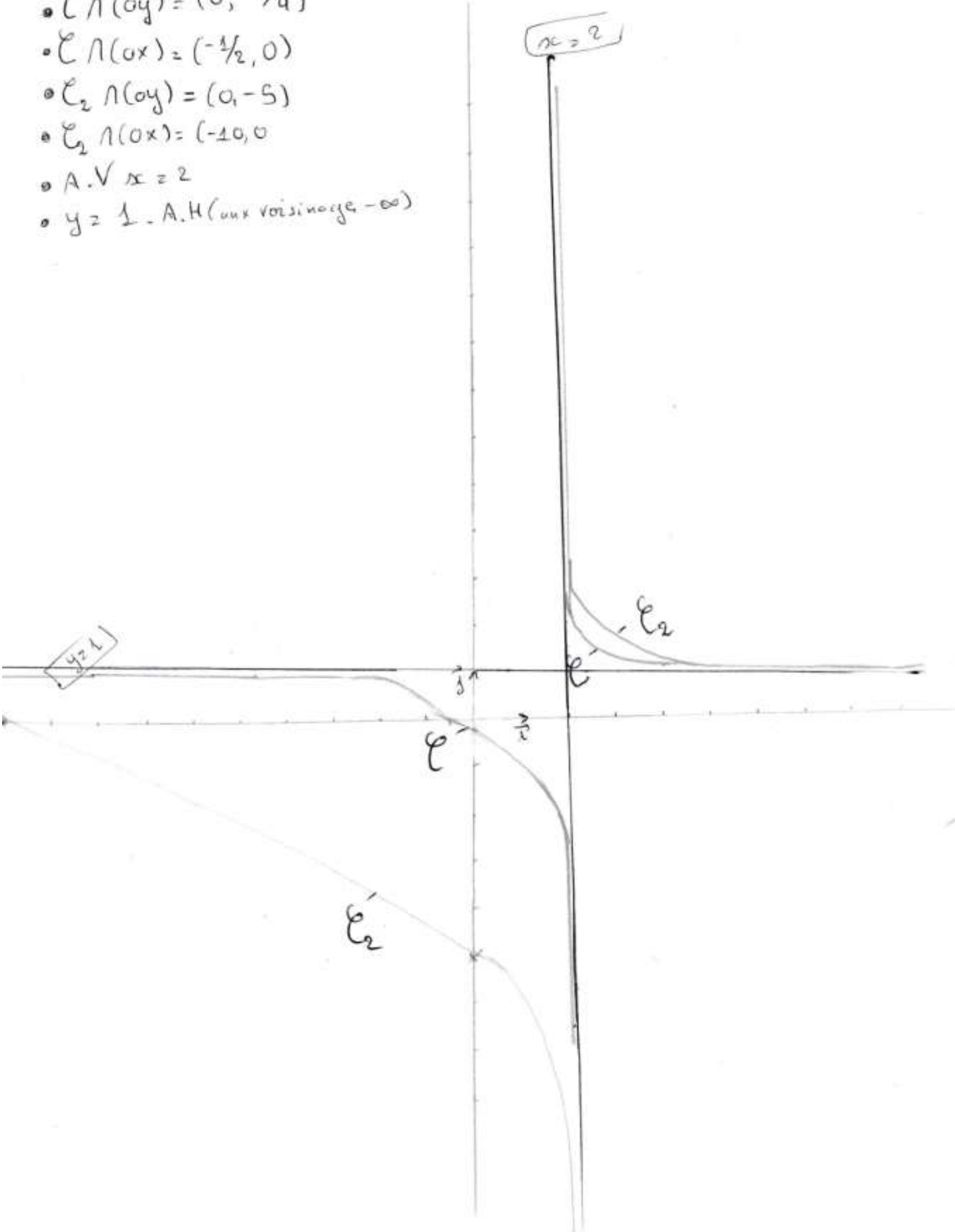
$\mathcal{C}_2 \cap (Ox)$: $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = -10$ $(-10; 0)$

$f(x) - f_2(x) = \dfrac{2x+1}{2x-4} - \dfrac{x+10}{x-2} = \dfrac{2x+1-2x-20}{2x-4} = \dfrac{-19}{2x-4}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$
$f(x)-f_2(x)$	$+$	||	$-$
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_2$ P.A.	$\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_2$	P.C	$\mathcal{C}_2 / \mathcal{C}_f$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

- $\mathcal{C} \cap (oy) = (0, -1/4)$
- $\mathcal{C} \cap (ox) = (-1/2, 0)$
- $\mathcal{C}_2 \cap (oy) = (0, -5)$
- $\mathcal{C}_2 \cap (ox) = (-10, 0$
- A.V $x = 2$
- $y = 1$. A.H (aux voisinage $-\infty$)



Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ par : $f(x)=\frac{1+\sin x}{\sin x}$

1) Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Démontrer que: $\forall x\in I;\quad f'(x)=(f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2-2f(x)}$

3) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer sa dérivée.

Solution

Solution

1) $I=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $f(x)=\frac{1+\sin x}{\sin x}$

$x\in I$ Etudions la variation de f sur I.

Comme $\sin x\neq 0$ $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ la fonction f est definie, continue et derivable sur I

x	$\pi/2$		π
$\sin x$		$+$	0

• $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\frac{1+1}{1}=2$

• $\lim\limits_{x\to\pi^-}=f(\pi)=\frac{1+\sin x}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

• $f'(x)=\frac{\cos x\sin x-\cos x(1+\sin x)}{\sin^2 x}$

$=\frac{\cos x\sin x-\cos x-\cos x\sin x}{\sin^2 x}$

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\end{cases}$

T.V de f

x	$\pi/2$		π
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

comme f est continue et strictement monotone sur l'integralle I $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ elle realise une bijection de I pour l'intervalle

$J=f(I)$

$=[2,+\infty[$

2)

2) Montrer que $\forall x \in I$

$$f'(x) = (f(x)-1)\sqrt{f(x)^2 - 2f(x)}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\sin x} - 1 \sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{\sin x}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\sin x}{\sin x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1+\sin x^2 + 2\sin x - 2\sin x - 2\sin x^2}{\sin^2 x}}$$

$$\frac{1}{\sin x} \times \sqrt{\frac{1-\sin x^2}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \times \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \times -\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$\Rightarrow \forall x \in I$

$$f'(x) = (f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2 - 2f(x)}$$

3) Comme f est derivable et comme sa derivée ne s'annulle pas sur l'interval ouvert $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ la fonction f^{-1} est donc dérivable sur $f[1, +\infty[$

calculer sa dérivé

$$f^{-1} = (f(f^{-1}(x)) = x$$

On remplace :

$$f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) - 1) \times \sqrt{f(f^{-1}(x))^2 - 2(f(f^{-1}(x))}$$

$$f^{-1} = (x-1)\sqrt{x^2-2x}$$

$$\boxed{(f^{-1})' = \sqrt{x^2-2x} + (x-1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2-2x}}}$$

Exercice 15 (Bac 2013 sc)

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^3+2(n+2)x+1$.

Le paramètre n est un entier naturel.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0(x)=x^3+4x+1$.

b) Montrer que l'équation $f_0(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique U_0 et que $U_0\in]-1,0[$.

c) Tracer C_0.

2.a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe A que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

3.a) Prouver que pour tout entier naturel, l'équation $f_n(x)=0$ possède une unique solution U_n et que $U_n\in]-1,0[$

b) On considère la suite de terme général U_n.

Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

Solution

$f_n(x)=x^3+2(n+2)x+1$

1) $f_0(x)=x^3+4x+1$

$D_{f_0}=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

f_0 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$
- $f_0'(x)=3x^2+4>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f_0 :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	+
$f_0(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

(b) Comme f_0 est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et comme elle change de signe, l'équation $f_0(x)=0$ admet une unique solution U_0.

et comme : $f_0(-1)=-4<0$

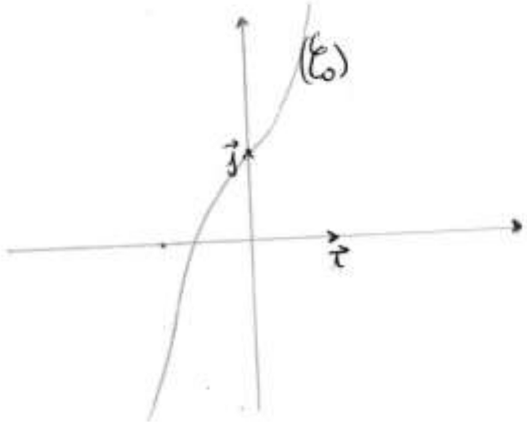
et : $f_0(0)=1>0$.

Donc :

$-1<U_0<0$ Cad : $U_0\in]-1,0[$

(c) La courbe de C_0 de f_0.

- $C_0\cap(ox)$: $f_0(x)=0 \Leftrightarrow x=U_0$ et $U_0\in]-1,0[$
- $C_0\cap(oy)=f_0(0)=1$.



2°) ⓐ $M(x,y) \in C_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow M(x,y) \in C_n \cap C_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

$f_n(x) = y$ et $f_{n+1}(x) = y$
$\forall n \in \mathbb{N}$

Donc

$f_n(x) = f_{n+1}(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \cancel{x^3} + 2[(n+1)+2]x + \cancel{1} = \cancel{x^3} + 2(n+2)x + \cancel{1}$

$\Rightarrow 2(n+3)x = 2(n+2)x$

$\Rightarrow \cancel{2nx} + 6x = \cancel{2nx} + 4x$

$\Rightarrow 6x - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$f_{n+1}(0) = f_n(0) = 1$

Donc

Toutes les courbes (C_n) passant par le point $A(0,1)$

ⓑ $f_{n+1}(x) - f_n(x) =$
$[x^3 + 2(n+3)x + 1] + [x^3 + 2(n+2)x + 1]$

$= \cancel{x^3} + \cancel{2nx} + 6x + \cancel{1} - \cancel{x^3} - \cancel{2nx} - 4x - \cancel{1}$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2n$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	$-$	0	$+$
C_n et C_{n+1}	C_n / C_{n+1}	P.C	C_{n+1} / C_n

3°) ⓐ $f_n(x) = x^3 + 2(x+2)x + 1$

$Df_n = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f_n est continue et derivable sur $\mathbb{R}$.

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x^3) = +\infty$

• $f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+2) > 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tableau de variation de f_n:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
$f_n(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Comme f_n est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et comme elle change de signe, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n.

Et comme $f_n(-1) = -2(n+2) < 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$ et $f_n(0) = 1 > 0$

Donc $U_n \in]-1, 0[$

(b) On a $U_n \in]-1, 0[\ \forall n \in \mathbb{N}$

or nous avons vu dans 2°(b)

que $\forall x \in]-\infty, 0[$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ et $]-1, 0[\subset]-\infty, 0[$

D'où $\forall x \in]-1, 0[$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$$

Donc $f_{n+1}(U_{n+1}) - f_n(U_{n+1}) < 0$

D'où

$$f_{n+1}(U_{n+1}) < f_n(U_{n+1})$$

or

$$f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$$

D'où $0 < f_n(U_n) = 0$

or $f_n(U_n) = 0$

D'où $f_n(U_n) < f_n(U_{n+1})$

or

f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'où

$$U_n < U_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite (U_n) est croissante.

Et comme

(U_n) est croissante et majorée (par 0) elle est donc **convergente**

Primitives et integrale, chapitre (6)

EXERCICES

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$f_1(x) = 5x^3 + \dfrac{2}{3\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2} + 3$

$f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \dfrac{3}{x^5} + 4x - 1$

$f_3(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$

$f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015}$

$f_5(x) = \tan^{2013} x + \tan^{2015} x$

$f_6(x) = \dfrac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015}$

$f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

$f_9(x) = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$f_{10}(x) = \dfrac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}}$

Solution:

• $f_1(x) = 5x^3 + \dfrac{2}{3\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2} + 3$

$F_1(x) = \dfrac{5}{4}x^4 + \dfrac{2}{3} \times 2\sqrt{x} + \dfrac{5}{x} + 3x + 2$

est une primitive de f_1 sur $]0,+\infty[$

• $f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \dfrac{3}{x^5} + 4x - 1$

$2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-5} + 4x - 1$

$F_2(x) = \dfrac{2}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + \dfrac{3}{-5+1} x^{-5+1} + 2x^2 - x + C$

$F_2(x) = \dfrac{4}{5}\sqrt{x^5} - \dfrac{3}{4x^4} + 2x^2 - x + C$

est une primitive de f_1 sur $]0,+\infty[$

• $f_3(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$

$F_3(x) = \tan x - 7 \times \left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right) + C$

$= \operatorname{tang} x + \dfrac{7}{2}\cos 2x + C$

$F_3(x) = \operatorname{tang} x + \dfrac{7}{2}\cos 2x + C$

est une primitive de f_3 sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\ k \in \mathbb{Z}$

• $f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015} = \dfrac{5}{4}(4x^3)(x^4+1)^{2015}$

$= \dfrac{5}{4} u'(x)(u(x))^n$ avec $u(x) = x^4+1$

et $n = 2015$ Donc

$$f_4(x) = \frac{5}{4}\left(\frac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right)+C$$

$$f_4(x) = \frac{5}{4}\left(\frac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right)+C$$

est une primitive de f_4 sur $\mathbb{R}$

• $f_5(x) = \tan x^{2015} = \tan x^{2013}(1+\tan^2 x)$

$\Rightarrow u'(x)(u(x))^n$ avec $u(x) = \tan x$ et $n = 2013$

$$F_5(x) = \frac{\tan x^{2014}}{2014} + C$$

est une primitive de f_5 sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $k \in \mathbb{Z}$

• $f_6(x) = \dfrac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{3x^2}{x^2(x+1)^2} + \dfrac{(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$

$\dfrac{3}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2}$

$$F_6(x) = \frac{-3}{x+1} - \frac{1}{x} + C$$

est une primitive de f_6 sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]1, 0[$ et $]0, +\infty[$

• $f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015} = \frac{1}{4}(4x^3)(x^4+1)^{2015}$

$$F_7(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right)+C$$

est une primitive de f_7 sur $\mathbb{R}$

• $f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

$= \cos x\,(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} =$

$u'(x)\cdot(u(x))^{\frac{1}{2}}$ On

$u(x) = 1+\sin x$

$$F_8(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+\sin x)^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$F_8 = \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+(\sin x))^3} + C$$

est une primitive de f_8 sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$ $1-\sin x \geq 0$)

• $f_9(x) = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}} = \dfrac{3}{-2} \times \dfrac{-2\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$= \dfrac{-3}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$ où $u(x) = 3+2\cos x$

Donc $F_9(x) = -\dfrac{3}{2} \times 2\sqrt{3+2\cos x}$

$F_9 = -3\sqrt{3+2\cos x} + C$

est une primitive de f_9 sur $\mathbb{R}$ (car $3+2\cos x \geq 1 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\cdot\ f_{10}(x) = \frac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{4}{3}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right) \text{ ou } u(x) = x^2+2x+5$$

$$F_{10}(x) = \frac{4}{3} \times 2\sqrt{x^2+2x+5} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^2+2x+5} + C$$

est une primitive de f_{10} sur $\mathbb{R}$.

(car $x^2+2x+5 = (x+1)+4 \geq 4 > 0$)

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On pose, pour tout entier naturel n non nul: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

1) Montrer que f admet une primitive sur IR et déterminer sa primitive F telle que $F(0) = 1$.

2) Ecrire F(x) sous la forme d'un quotient en déduire une expression simple de f(x).

Solution

Exercice 3 :

1°) Comme f est une fonction polynôme, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Donc $F(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + c$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, $F(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.

D'où $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$, est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.

2°) $F(x)$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une S.G de raison $q = x$ et de premier terme 1.

Donc si $x \neq 1$

$$\text{Alors } F(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

D'où $\forall x \neq 1$

$$f(x) = F'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} f(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}x}, 0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue, positive, décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a: $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$.

3) Interpréter le résultat précédent graphiquement. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}x} & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

- Montrons que f est position sur $[0,\frac{\pi}{2}]$
- $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $\tan x\geqslant 0\Rightarrow \tan^{2012}x\geqslant 0$

$\Rightarrow 1+\tan^{2012}x>0\Rightarrow \frac{1}{1+\tan^{2012}x}>0$

Donc, $\boxed{\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[\ f(x)>0}$ ①

D'autre part, $\boxed{f(\frac{\pi}{2})=0}$ ②

De : ① et ② on a, $\boxed{\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]\ f(x)\geqslant 0}$

Donc,
f est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

- Montrons que f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

⊗ Sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ $f(x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}x}$ inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

Donc,
$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,\frac{\pi}{2}[}$ ③

Montrons que f est continue à gauche en $\pi/2$

on a: $f(\frac{\pi}{2})=0$

et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\tan^{2012}x}\right)$
$=\frac{1}{+\infty}=0$

Donc,
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f(\frac{\pi}{2})$

D'où,
$\boxed{f \text{ est continue à gauche en } \frac{\pi}{2}}$ ④

De ③ et ④ on deduit que :
f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

- Montrons que f est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$
- Sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ $f(x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}x}$ inverse d'une fonction dérivable et qui s'annule pas sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ donc f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[$

$$f'(x) = \frac{-2012(1+\tan^2 x)\tan^{2011} x}{(1+\tan^{2012} x)^2} \leqslant 0$$

<u>D'où</u> f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

<u>Donc</u>

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0, \tfrac{\pi}{2}]}$$

2) a) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) =$

$$\frac{1}{1+\tan^{2012} x} + \frac{1}{1+(\tan(\frac{\pi}{2}+x))^{2012}}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{2012}} + \frac{1}{1+\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}\right)^{2012}}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\sin^{2012} x}{\cos^{2012} x}\right)} + \frac{1}{1+\left(\frac{\cos^{2012} x}{\sin^{2012} x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^{2012} x + \sin^{2012} x}{\cos^{2012} x}} + \frac{1}{\frac{\sin^{2012} x + \cos^{2012} x}{\sin^{2012} x}}$$

$$= \frac{\cos^{2012} x}{\cos^{2012} x + \sin^{2012} x} + \frac{\sin^{2012} x}{\sin^{2012} x + \cos^{201} x}$$

$$= \frac{\cos^{2012} x + \sin^{2012} x}{\cos^{2012} x + \sin^{2012} x} = 1$$

b) Pour $x = 0$ <u>on a</u>

$$f(0) + f(\tfrac{\pi}{2} - 0) = 1 + f(\tfrac{\pi}{2}) = 1 + 0 = 1$$

c) Pour $x = \frac{\pi}{2}$ <u>on a</u>

$$f(\tfrac{\pi}{2}) + f(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}) = f(\tfrac{\pi}{2}) + f(0) = 0 + 1 = 1$$

<u>Donc</u>

$$\boxed{\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \; f(x) + f(\tfrac{\pi}{2} - x) = 1}$$

3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $f(x) + f(2a + x) = 2b$

<u>où</u> $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$

<u>Donc</u>

le point $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de la courbe de f.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ est l'aire du domaine D délimité par $\mathcal{C}_f$ $[OA]$ et $[OB]$

<u>où</u> $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ et $B(0, 1)$

<u>or</u>

les symetrie S_I de centre $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$

Primitives et intégrales (chapitre 6)

Exercice 9

Soit la fonction définie par: $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n on pose: $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1) Calculer $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ et montrer que: $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que: $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$.

4) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

1) $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx =$

$- \int_0^1 (-1)(1-x)^{\frac{1}{2}} dx$

$= -\int_0^1 u'(x)(u(x))^{\frac{1}{2}} dx$ où $u(x) = 1-x$

Donc $I_0 = \left[\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$

$= -\left[\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$= -(0 - \frac{2}{3}) = -(-\frac{2}{3})$

$\boxed{I_0 = \frac{2}{3}}$

• $I_n \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0$

$\Rightarrow 0 \le 1-x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{1-x} \le 0$

Et en multipliant par x^n

$(x^n \ge 0 \ \forall x \in [0,1])$ On a

$0 \le x^n\sqrt{1-x} \le x^n$ donc

$0 \le \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx \le \int_0^1 x^n dx$

D'où $0 \le I_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ donc

$0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

$\boxed{\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}}$

2) $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$ et $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\, dx$

On a $0 \le x \le 1$

Et en multipliant par $x^n\sqrt{1-x}$ $(x^n\sqrt{1-x}) \ge 0 \ \forall x \in [0,1]$

On obtient $0 \le x^{n+1}\sqrt{1-x} \le x^n\sqrt{1-x}\, dx$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 \le I_{n+1} \le I_n$ D'où (I_n) est décroissante et positive Et comme

(I_n) et décroissante et positive

Et comme (I_n) est $\searrow$ et minorée par (0) donc (I_n) est convergente

Et comme $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc d'après le théorème de gendarme On a

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = n x^{n-1} \\ v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$$\int_0^1 u(x) v'(x)\, dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x)\, dx$$

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx = \left[-\frac{2}{3} x^n (1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} \left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)\sqrt{1-x}\, dx$$

$$I_n = -0 + 0 + \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\, dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 (x^{n-1} - x^n)\sqrt{1-x}\, dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} - x^n\sqrt{1-x}\, dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3} \left(\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\, dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx\right)$$

$$I_n = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$$

$$3I_n = 2n I_{n-1} - 2n I_n \Rightarrow$$

$$3I_n + 2nI_n = 2n I_{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+3) I_n = 2n I_{n-1}$$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \frac{2^{2n+2}(n)!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

Nous venons de démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $(2k+3) I_k = 2k I_{k-1}$

Çad $\forall k \in \mathbb{N}$

$$I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$$

Et en appliquant cette relation pour k allant de 1 jusqu'à n On obtient

$$I_1 = \frac{2}{5}$$

$$I_2 = \frac{4}{7} I_1$$

$$I_3 = \frac{6}{9} I_2$$

$$\vdots$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

et en multipliant membre par membre et en simplifiant On obtient

$$I_n = I_0 \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{6}{9} \times \dots \times \frac{2n}{2n+3}$$

or $I_0 = \frac{2}{3}$ d'où

d'où

$$I_n = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{6}{9} \times \dots \times \frac{2n}{2n+3}$$

Et en multipliant le membre droite et en divisant par

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (2n)(2n+2)$$

$$I_n = \frac{2\,(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n)^2\,(2n+2)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times \dots (2n+2)(2n+3)}$$

$$I_n = \frac{2\left((2\times1)(2\times2)(2\times3)\times \dots (2\times n)\right)^2 \times 2(n+1)}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{2\,(2^n \times n!)^2 \times 2(n+1)}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{2 \times 2 \times 2^{2n} \times (n!)\left[(n!)(n+1)\right]}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{2^{2n+2}(n!)(n+1)!}{(2n+3)!}$$

D'où

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{I_n = \frac{2^{2n+2}(n!)(n+1)!}{(2n+3)!}}$$

Exercice 11

Soit f la fonction d'une variable réelle x définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et représenter Γ. Montrer que Γ est un arc d'un cercle C à préciser.

2) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$. Donner sa valeur sans calculs.

3) En posant $x=\cos t$, calculer I et comparer avec le résultat précédent.

Solution

Solution :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

1) $x \in D_f \iff 1-x^2 \geq 0$

$\iff (1-x)(1+x) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_f = [-1,1]$

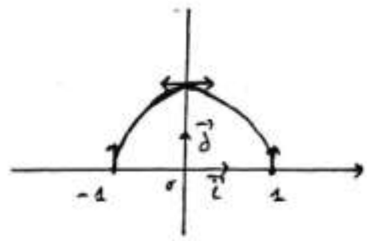
- $f(-1)=0$
- $f(1)=0$

$\forall x \in]-1,1[$

$f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

le signe de f' est celui de $-x$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}\times\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1-x^2}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

Γ admet au point $A(-1,0)$ une demi tangente verticale dirigé vers le haut.

de même $\mathcal{C}$ admet une demi tangentes verticales au point $B(1,0)$

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$y = \sqrt{1-x^2} \quad y \geq 0$

$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 1, y \geq 0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ est une demi cercle de centre O et de rayon 1

2) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

I est l'aire d'un quart du cercle $\mathcal{C}(0,1)$

$I = \frac{R^2 \times \pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ car $R = 1$.

$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$

3) $x = \cos t$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$dx = -\sin t \, dt$

$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\, dt$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 t} \times \sin t \, dt$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t} \times \sin t \, dt$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin t \, dt$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$.

• On a $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$

$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$\left[\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - (0-0)\right] =$

$\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$

Exercice 13

1) Montrer que pour tout entiers naturels non nuls m et n: $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$.

2) En déduire que: $\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}$.

Solution

$(n, m) \in \mathbb{N}^*$

1) $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx \overset{?}{=} \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$.

On pose:

$t = 1-x \Rightarrow x = 1-t$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ dt = -dx \Rightarrow dx = -dt \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_1^0 (1-t)^n t^m (-dt)$$
$$= \int_0^1 t^m (1-t)^n dt = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$

Donc:

$$\boxed{\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

2) $$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^n \sum_{p=0}^{m} C_m^p (1)^{m-p}(-x)^p dx$$
$$= \sum_{p=0}^{m} C_m^p \int_0^1 x^n (-1)^p x^p dx$$
$$= \sum_{p=0}^{m} C_m^p (-1)^p \int_0^1 x^{n+p} dx$$
$$= \sum_{p=0}^{m} C_m^p (-1)^p \left[\frac{1}{n+p+1} x^{n+p+1}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}$$

De même :

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^m \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, 1^{n-p}(-x)^p\,dx$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p \int_0^1 x^m(-1)^p x^p\,dx = \sum_{p=0}^{n} C_n^p(-1)^p\int_0^1 x^{m+p}\,dx$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p(-1)^p\left[\frac{1}{m+p+1}x^{m+p+1}\right]_0^1 = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,\frac{(-1)^p}{m+p+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,\frac{(-1)^p}{m+p+1}$$

Comme les deux intégrales $\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ et $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ sont égaux (d'après 1))

on obtient :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{m} C_m^p\,\frac{(-1)^p}{n+p+1} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,\frac{(-1)^p}{m+p+1}}$$

Exercice 15

1) Trouver I_{n+1} en fonction de I_n : a) $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$; b) $I_n=\int_0^1 \frac{t^{2n+1}dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

2) Trouver I_{n+2} en fonction de I_n : a) $I_n=\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$; b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\,dt$; c) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,dt$.

1) a) $I_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt$

on pose = $\begin{cases} u(t)=t^{n+1} \\ v'(t)\ \sqrt{1-t} \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(t)=(n+1)t^n \\ v(t)=-\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t} \end{cases}$

$$\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)\cdot v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt=\left[t^{n+1}\left(-\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t}\right)\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(n+1)t^n\sqrt{1-t}\,(1-t)\,dt$$

$$\Rightarrow I_{n+1}=-0+0+\frac{2n+2}{3}\int_0^1 t^n(1-t)\sqrt{1-t}\,dt$$

$$=\frac{2(n+1)}{3}\int_0^1(t^n-t^{n+1})\sqrt{1-t}\,dt$$

$$=\frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}-t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt$$

$$=\frac{2(n+1)}{3}\left(\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt-\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt\right)$$

$$=\frac{2(n+1)}{3}\left(I_n-I_{n+1}\right)=\frac{2n+2}{3}I_n-\frac{2n+2}{3}I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1}+\frac{2n+2}{3}I_{n+1}=\frac{2n+2}{3}I_n$$

$$\Rightarrow 3I_{n+1}+(2n+2)I_{n+1}=(2n+2)I_n$$

$$\Rightarrow (2n+5)I_{n+1}=(2+2n)I_n$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\Rightarrow I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+5}I_n$$

b) $I_{n+1}=\int_0^1\frac{t^{2(n+1)+1}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=\int_0^1\frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot t^{2n+2}\,dt$

on pose = $\begin{cases} u(t)=t^{2n+2} \\ v'(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\end{cases}$ Alors = $\begin{cases} u'(t)=(2n+2)t^{2n+1} \\ v(t)=\sqrt{1+t^2}\end{cases}$

$$\therefore \int_0^1 u(t)\,v'(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(t)\,v(t)\,dt$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \Big[t^{2n+2}\sqrt{1+t^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 (2n+2)\,t^{2n+1}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\therefore I_{n+1} = \sqrt{2} - 0 - (2n+2)\int_0^1 t^{2n+1}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\therefore \sqrt{2} - (2n+2)\int_0^1 t^{2n+1}\sqrt{1+t^2}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt$$

$$\therefore I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\int_0^1 \frac{t^{2n+1}(t^2+1)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\int_0^1 \frac{t^{2n+1}+t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\int_0^1 \left(\frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\left(\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right)$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)(I_n + I_{n+1})$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)I_n - (2n+2)I_{n+1}$$

$$(2n+2)I_{n+1} + I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)I_n$$

$$(2n+3)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)I_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+3} - \frac{2n+2}{2n+3}I_n}$$

2) ⓐ

$$I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+2}}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t^n(\cancel{1+t^2})}{(\cancel{1+t^2})}dt$$

$$= \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0$$

$$= \frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

c.a.d :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$$

ⓑ $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} t^{n+2}\sin t\,dt$

on pose : $\begin{cases} U_1(t) = t^{n+2} \\ V_1'(t) = \sin t \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} U_1'(t) = (n+2)t^{n+1} \\ V_1(t) = -\cos t \end{cases}$

$$\int_0^{\pi/2} U_1(t)\,V'(t)\,dt = \left[U_1(t)V_1(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} U_1'(t)V_1(t)\,dt$$

$$\int_0^{\pi/2} t^{n+2}\sin t\,dt = \left[-t^{n+2}\cos t\right]_0^{\pi/2} + (n+2)\int_0^{\pi/2} t^{n+1}\cos t\,dt$$

$$I_{n+2} = -0 + 0 + (n+2)\int_0^{\pi/2} t^{n+1}\cos t\,dt$$

$$I_{n+2} = (n+2)\int_0^{\pi/2} t^{n+1}\cos t\,dt \quad ①$$

On pose : $\begin{cases} U_2(t) = t^{n+1} \\ V_2'(t) = \cos t \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} U_2'(t) = (n+1)t^n \\ V_2(t) = \sin t \end{cases}$

$$\int_0^{\pi/2} U_2(t)\,V_2'(t)\,dt = \left[U_2(t)V_2(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} U_2'(t)V_2(t)\,dt.$$

$$\int_0^{\pi/2} t^{n+1}\cos t\,dt = \left[t^{n+1}\sin t\right]_0^{\pi/2} - (n+1)\int_0^{\pi/2} t^n\sin t\,dt$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - 0 - (n+1)I_n$$

$$\int_0^{\pi/2} t^{n+1}\cos t\,dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n \quad ②$$

De ① et ② on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+2)\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n\right]$$

ⓒ. $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\,dt$

on pose : $\begin{cases} u(t) = (\sin t)^{n+1} \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(t) = (n+1)\cos t(\sin t)^n \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}dt = \left[-\cos t\,(\sin t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,(\sin t)^n\,dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}dt = -0 + 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)(\sin t)^n\,dt$$

$$I_{n+2} = (n+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}dt\right]$$

$$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

$$\Rightarrow I_{n+2} + (n+1)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

$$\Rightarrow (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n}$$

Exercice 17

Soient a et b deux entiers naturels. On pose : $I(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta dt$

1) Calculer $I(\alpha,0)$.

2) On suppose que $\beta\geq 1$. À l'aide d'un intégration par parties, démontrer que :

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)$$

3) En déduire que : $I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta)!}I(\alpha+\beta;0)$, puis que: $I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$.

Solution

$I_{(\alpha,\beta)}=\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta dt$

$\alpha,\beta\in\mathbb{N}$

1) $I_{(\alpha,0)}=\int_0^1 t^\alpha dt=\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right]_0^1$

$I_{\alpha,0}=\frac{1}{\alpha+1}$

2) on utilise une intégration par parties.

On pose: $\begin{cases}u'(t)=t^\alpha\\ v(t)=(1-t)^\beta\end{cases}$

Alors, $\begin{cases}u(t)=\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\\ v'(t)=-\beta(1-t)^{\beta-1}\end{cases}$

$\int u'v=[uv]-\int u'v$

$I_{(\alpha,\beta)}=\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}(1-t)^k\right]_0^1-\int_0^1\frac{-\beta}{1+\alpha}t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt$

$=0+\frac{\beta}{1+\alpha}\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt$

$\boxed{I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\beta}{1+\alpha}I_{(\alpha+1,\beta-1)}}$ (*)

3) on écrit (*) pour différentes valeur.

$I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\beta}{\alpha+1}\cancel{I_{(\alpha+1,\beta-1)}}$

$\cancel{I_{(\alpha+1,\beta-1)}}=\frac{\beta-1}{\alpha+2}I_{(\alpha+2,\beta-2)}$

$I_{(\alpha+2,\beta-2)}=\frac{\beta-2}{\alpha+3}I_{(\alpha+3,\beta+3)}$

$\vdots$

$I_{(\alpha+\beta-1,1)}=\frac{1}{\alpha+\beta}I_{(\alpha+\beta,0)}$

Par Produit membre à membre:

$I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\times\dots\times 1}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\times\dots\times(\alpha+1)}I_{(\alpha+\beta,0)}$

$I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\beta!\,\alpha!}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\times\dots\times(\alpha+1)\alpha!}I_{(\alpha+\beta,0)}$

$\boxed{I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\beta!\,\alpha!}{(\alpha+\beta)!}I_{(\alpha+\beta,0)}}$

On remplace, d'après ①:

$$I_{(\alpha+\beta,0)}=\frac{1}{\alpha+\beta+1}$$

Donc

$$I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta)!}\times\frac{1}{\alpha+\beta+1}$$

$$\boxed{I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}}$$

Exercice 19

L'objet du problème est de décrire une méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale: $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$.

1) Transformation de J

Pour tout élément $u\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, on pose $F(u)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\sin t}{t}dt$ et, pour tout élément $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on pose $G(x)=\int_0^x\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$.

a) Prouver que, pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$.

(On pourra comparer les dérivées des deux membres.)

b) En déduire que: $J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$.

2) Approximation de J

Soit (U_n) la suite définie par $U_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi t\,dt$ et, si $n\geq 1$, $U_n=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\sin\pi t\,dt$.

a) Prouver que, pour tout $n\geq 1$: $J=U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}+r_n$ où $r_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}dt$.

b) Etablir que: $\forall t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$; $\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}\leq 2t^n$. En déduire une majoration simple de r_n.

c) Montrer que $J=\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0+U_1+\cdots+U_{n-1})$.

3) Calcul des intégrales U_n

a) Calculer U_0 et U_1.

b) Etablir que, pour tout $n\geq 2$: $U_n=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)U_{n-2}\right)$.

4) Conclusion

A partir des résultats obtenus en 2) et 3), indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision de 10^{-2}. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul.)

Solution

. $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

1) a) On a

$G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$

on a

$G(x)=\int_0^x\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$

$G'(x)=1\times\frac{\sin\pi x}{1-x}=\frac{\sin\pi x}{1-x}$

$(F(\pi)-F(\pi(1-x)))'=\pi F'(\pi(1-x))$

on a

$F(u)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\sin t}{t}dt$. $F'(u)=\frac{\sin u}{u}$

$$F'(\pi(1-x)) = \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)} = \frac{\sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi(1-x)}$$

$$(F(\pi) - F(\pi(1-x)))' = \cancel{\pi} \times \frac{\sin \pi x}{\cancel{\pi}(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{1-x} = G'(x)$$

<u>donc</u>

$$G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x)) + k$$

<u>Pour</u> $x = 0$

$\Rightarrow G(0) = F(\pi) - F(\pi) + k$

$\Rightarrow 0 = k$

$\Rightarrow G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$

ⓑ <u>on a</u> $J = F(\pi)$

$J = G(x) + F(\pi(1-x))$

<u>pour</u> $x = 1/2$

$\Rightarrow J = G(1/2) + F(\pi/2)$

$J = G(1/2) = \int_0^{1/2} \frac{\sin \pi t}{1-t}\, dt$

2) $U_0 = \int_0^{1/2} \sin \pi t \, dt$

$\forall n \geq 1, \ U_n = \int_0^{1/2} t^n \sin \pi t \, dt$

<u>M.q</u>

$\forall n \geq 1$, <u>on a</u>

$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + r_n$

$= \int_0^{1/2} \sin \pi t \, dt + \int_0^{1/2} t \sin \pi t \, dt + \int_0^{1/2} t^2 \sin \pi t \, dt + \dots + \int_0^{1/2} t^n \sin \pi t \, dt + \int_0^{1/2} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} dt$

$= \int_0^{1/2} \left(1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} + \frac{t^n}{1-t}\right) \sin \pi t \, dt$

$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1-t^n}{1-t} + \frac{t^n}{1-t}\right) \sin \pi t \, dt = \int_0^{1/2} \frac{\sin \pi t}{1-t} = J$

<u>donc</u> $J = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + r_n$

⑤ M.q : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$

$t^* \quad 0 \leq t \leq 1/2 \Rightarrow -1/2 \leq -t \leq 0 \Rightarrow 1/2 \leq 1-t \leq 1 \Rightarrow \boxed{1 \leq \frac{1}{1-t} \leq 2}$ ①

D'autre part :

$0 \leq t \leq 1/2 \Rightarrow 0 \leq \pi t \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq \sin \pi t \leq 1 \Rightarrow \boxed{0 \leq t^n \sin \pi t \leq t^n}$ ②

Par produit : ① × ② : $0 \leq \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leq 2t^n$

Par integration : $0 \leq \int_0^{1/2} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} dt \leq \int_0^{1/2} 2t^n \, dt$

$0 \leq r_n \leq \left[\frac{2}{n+1} t^{n+1}\right]_0^{1/2} \Rightarrow 0 \leq r_n \leq \left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

or : $0 \leq r_n \leq \left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 1$

$\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$

$r_n \leq \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$

or : $0 \leq r_n \leq \frac{2}{n+1}$

ⓒ $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$, $\lim_{n \to +\infty} \quad = 0$

D'après le T.G : $\lim_{n \to +\infty} r_n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} J = \lim_{n \to +\infty} (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}) + \lim_{n \to +\infty} r_n$ (J = cte donc $\lim_{n \to +\infty} J = J$)

$J = \lim (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}) + 0 \Rightarrow J = \lim (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1})$

3) ⓐ $U_0 = \int_0^{1/2} \sin \pi t \, dt = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \cos 0 \Rightarrow U_0 = \frac{1}{\pi}$

$U_1 = \int_0^{1/2} t \sin \pi t \, dt$

I.P.P : $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin \pi t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \end{cases}$

$$U_1 = \left[-\frac{t\cos\pi t}{\pi}\right]_0^{1/2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2}\cos\pi\, dt = \left[\frac{-t}{\pi}\cos\pi t\right]_0^{1/2} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}-0\right) = \frac{1}{\pi^2} = U_1$$

(b) On a $U_n = \begin{cases} u_1(t) = t^n \\ v_1'(t) = \sin\pi t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(t) = nt^{n-1} \\ v_1(t) = -\frac{1}{\pi}\cos\pi t \end{cases}$

Car $U_n = \int_0^{1/2} t^n \sin\pi t\, dt$

$$U_n = \left[-\frac{t}{\pi}\cos\pi t\right]_0^{1/2} + \frac{n}{\pi}\int_0^{1/2} t^{n-1}\cos\pi t\, dt$$

$$U_n = \frac{n}{\pi}\int_0^{1/2} t^{n-1}\cos\pi t\, dt.$$

I. P. P. $\begin{cases} u_2(t) = t^{n-1} \\ v_2'(t) = \cos\pi t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2'(t) = (n-1)t^{n-2} \\ v_2(t) = \frac{1}{\pi}\sin\pi t \end{cases}$

$$U_n = \frac{n}{\pi}\left(\left[\frac{t^{n-1}}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{1/2} - \frac{(n-1)}{\pi}\int_0^{1/2} t^{n-2}\sin\pi t\, dt\right.$$

$$U_n = \frac{n}{\pi}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\pi} - \frac{(n-1)}{\pi}U_{n-2}\right)$$

$$U_n = \frac{1}{\pi^2}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)U_{n-2}\right)$$

Sad, $\boxed{\forall n \geq 2,\ U_n = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)U_{n-2}\right)}$

4) Conclusion:

On a $J = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} + r_n$ Donc, $J - (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}) = r_n$

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq r_n \leq \frac{(1/2)^n}{n+1}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq r_n \leq \frac{(1/2)^n}{n+1}$

Pour que $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$ soit une valeur approchée de J à 10^{-2} près il suffit que :

$|J - (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1})| < 10^{-2}$

or $0 \leq J - (U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}) \leq \frac{(1/2)^n}{n+1}$

D'où il suffit que $\frac{1}{(n+1)2^n} < 10^{-2}$

or pour $n = 6$ on a

$\frac{1}{(n+1)2^n} = \frac{1}{7\times 64} = \frac{1}{448} < \frac{1}{100} = 10^{-2}$

D'où il suffit . prendre $n = 6$ et

...

<u>alors:</u>

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

est une valeur approchée de J à 10^{-2} près.